UNIAMERICAS

UNIVERSIDADE DAS AMÉRICAS



Material didático

ALUNO

Nucleo de Pós Graducao - Fortaleza
Av. Dom Luís, 300, Lj. 215
(Piso L2 - Shopping Avenida)
Meireles - Fortaleza - CE
PABX (85) 3433-5476 | TIM 9605-7024 | OI 8518-5476
www.uniamericas.com.br

Pós-Graduação

QR CODE

Curso de Pós-Graduação

Disciplina:

MÉTODOS QUANTITATIVOS APLICADOS À ADMINISTRAÇÃO

Junho - 2012

Universidade das Américas
Av. Dom Luís, 300 Lj. 215 – Meireles
(85) 3433-5476 | TIM 9605-7024 | OI 8518-5476
www.uniamericas.com.br

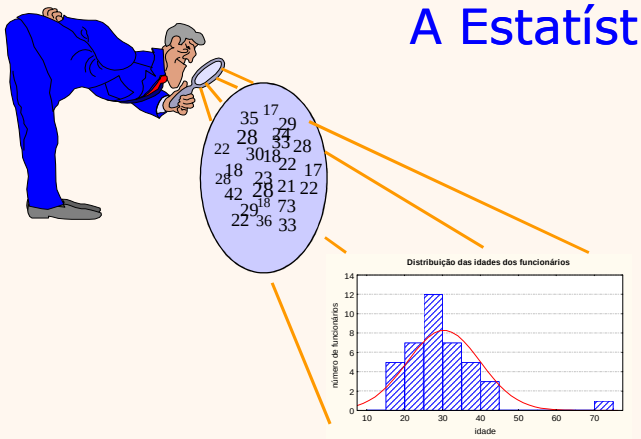
Métodos Quantitativos aplicados a Administração de Empresas

Willy Farias Albuquerque, M.Sc.

Cap. 1 - Introdução

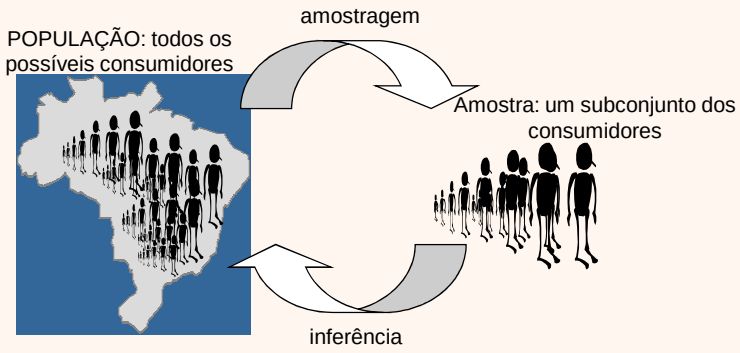
UNIAMERICAS – UNIVERSIDADE DAS AMÉRICAS

A Estatística



- A *estatística* envolve técnicas para coletar, organizar, descrever, analisar e interpretar *dados*, ou provenientes de experimentos, ou vindos de estudos observacionais.

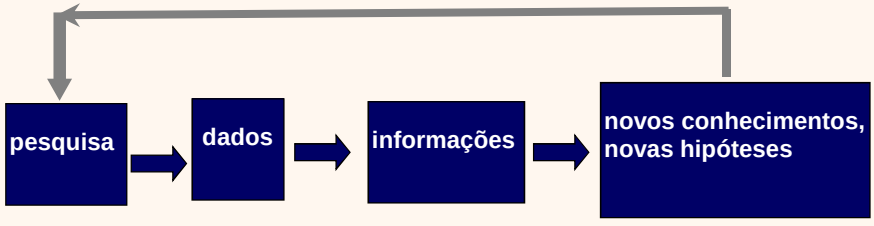
A Estatística



- A essência de uma análise estatística é tirar conclusões sobre uma população, ou universo, com base em uma amostra de observações.

Curso de Métodos Quantitativos – Prof. Willy Farias Albuquerque

Estatística x Pesquisa



Curso de Métodos Quantitativos – Prof. Willy Farias Albuquerque

Palavras-chave em Estatística

- Dados
- Variabilidade
- Modelos

Conceitos fundamentais

- População
- Amostra
- Amostragem
- Parâmetro
- Estatística

Medidas básicas

- Média
  - Sejam x_1, x_2,..., x_N dados de uma população:

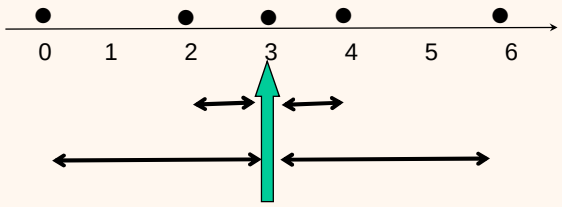
$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

  - Sejam x_1, x_2,..., x_n dados de uma amostra:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Medidas básicas

- Variância



Desvios dos valores em relação à média:
elementos básicos no cálculo da variância.

Medidas básicas

- Variância
  - Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_N$ dados de uma população:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$$

  - Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dados de uma amostra:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

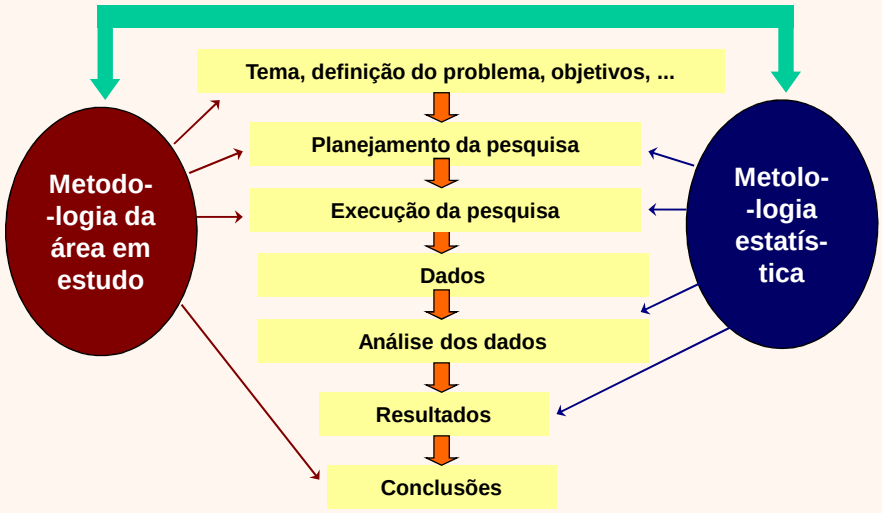
Métodos Quantitativos aplicados a Administração de Empresas

Willy Farias Albuquerque, M.Sc.

Cap. 2 – O planejamento de uma pesquisa

UNIAMERICAS – UNIVERSIDADE DAS AMÉRICAS

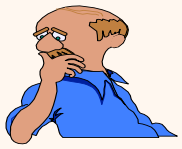
Etapas usuais de uma pesquisa empírica



Dois tipos de pesquisas empíricas

- **DE LEVANTAMENTO**

Características de interesse de uma população são levantadas (observadas ou medidas), mas sem manipulação.



- **EXPERIMENTAL**

Grupos de indivíduos (ou animais, ou objetos) são manipulados para se avaliar o efeito de diferentes tratamentos.



Pesquisas de levantamento

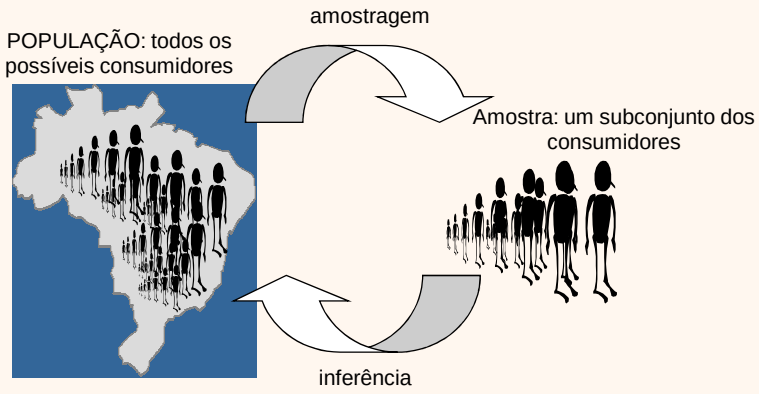


Ilustração de um levantamento por amostragem

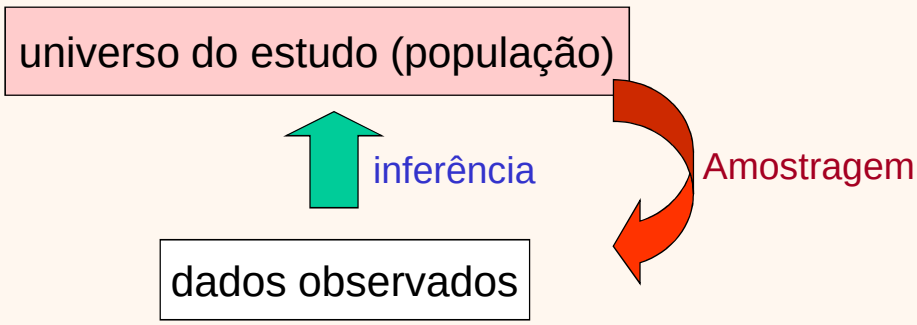
Perguntas que precisam ser respondidas no planejamento de um levantamento

- O quê?
  - características a serem observadas ➔ VARIÁVEIS
- Quem?
  - os elementos a serem pesquisados ➔ POPULAÇÃO
- Como?
  - o instrumento de coleta de dados ➔ QUESTIONÁRIO / ENTREVISTA ESTRUTURADA

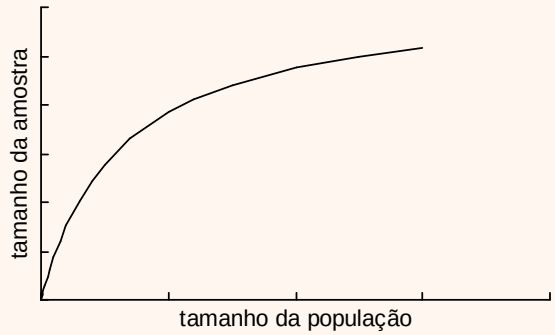
População x amostra

- **População**: conjunto dos elementos que se deseja estudar.
- **Amostra**: subconjunto da população.
- Amostragem: processo de seleção da amostra

Amostragem e Inferência estatística



Censo ou amostragem



Relação entre tamanho da população e tamanho da amostra para garantir determinada margem de erro

Tipos de amostragens aleatórias

- Amostragem aleatória simples
- Amostragem sistemática
- Amostragem estratificada
- Amostragem por conglomerados

Ex. de amostragem aleatória simples

População

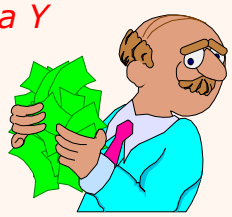
01. Aristóteles 06. Cardoso 11. Ernestino 16. Geraldo 21. Joana 26. Josefa 31. Paula	02. Anastácia 07. Carlito 12. Endevaldo 17. Gabriel 22. Joaquim 27. Josefina 32. Paulo Cesar	03. Arnaldo 08. Cláudio 13. Francisco 18. Getúlio 23. Joaquina 28. Maria José	04. Bartolomeu 09. Ermílio 14. Felício 19. Hiraldo 24. José da Silva 29. Maria Cristina	05. Bernardino 10. Ercílio 15. Fabrício 20. João da Silva 25.José de Souza 30. Mauro

Seleção de uma amostra aleatória simples com $n = 5$:

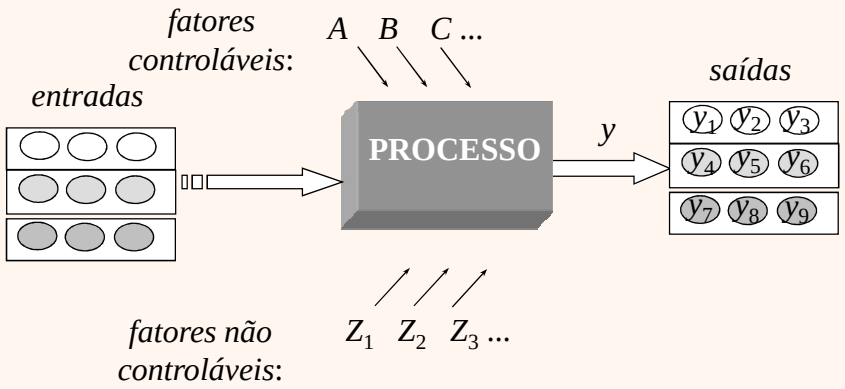
Números aleatórios: 20 10 07 01 32.
Amostra: {João da Silva, Ercílio, Carlito, Aristóteles, Paulo Cezar }

Planejamento de experimentos

- Estudo experimental: Manipula-se de forma planejada certas *variáveis independentes* ou *fatores* (*A, B, C, ...*) para verificar o efeito que esta manipulação provoca numa certa *variável dependente* ou *resposta Y*



Modelo geral de um processo ou sistema



Planejamento de experimentos

- Planejar o experimento para se ter informações suficientes (em termos dos objetivos da pesquisa) com o menor número possível de ensaios.
- Analisar os dados de forma compatível com o projeto experimental realizado.

Estratégias no planejamento de experimentos

- reconhecer, estabelecer e delimitar claramente o problema;
- identificar os possíveis fatores que podem afetar o problema em estudo;
- verificar quais fatores que poderão ser mantidos fixos e, portanto, não terão os seus efeitos avaliados no estudo experimental;
- Identificar, para cada fator, o intervalo de variação e os níveis que entrarão no estudo;
- escolher um projeto experimental adequado, isto é, saber como combinar os níveis dos fatores de forma que se possa resolver o problema proposto com o menor custo possível;
- escolher a resposta adequada, ou seja, a variável *Y* que mede adequadamente o resultado (a qualidade, o desempenho, etc.) do processo e
- o planejamento de como será a análise dos dados do experimento.

Conceitos básicos

- Unidade experimental
- Bloco
- Fatores
- Tratamentos
- Replicações (repetições)
- Aleatorização

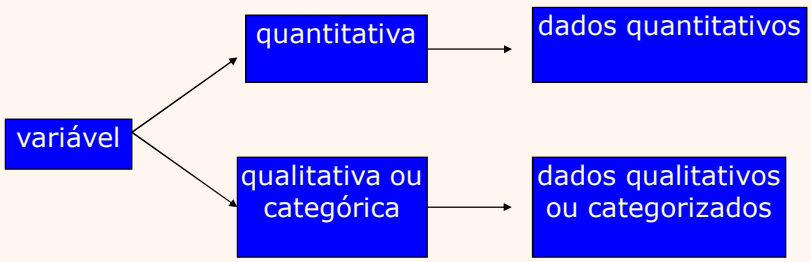
Métodos Quantitativos aplicados a Administração de Empresas

Willy Farias Albuquerque, M.Sc.

Cap. 3 – Análise exploratória de dados

UNIAMERICAS – UNIVERSIDADE DAS AMÉRICAS

Dados e variáveis



Distribuição de freqüências

- A **distribuição de freqüências** consiste na organização dos dados de acordo com as ocorrências dos diferentes resultados observados.
- Pode ser apresentada em **tabela** ou **gráfico.**

Dados

Provedor usado por cada usuário

indivíduo	provedor	indivíduo	provedor	indivíduo	provedor	indivíduo	provedor
1	C	11	C	21	B	31	A
2	A	12	A	22	A	32	A
3	B	13	B	23	A	33	B
4	B	14	D	24	B	34	C
5	C	15	A	25	A	35	B
6	B	16	B	26	A	36	D
7	D	17	B	27	B	37	B
8	B	18	C	28	D	38	B
9	B	19	D	29	D	39	B
10	A	20	B	30	C	40	C

Distribuição de freqüências para variáveis qualitativas

Tabela. Distribuição de freqüências do provedor usado pelo visitante do *site*.

Provedor	Freqüência	Percentagem
A	10	25,0
B	17	42,5
C	7	17,5
D	6	15,0
Total	40	100,0

Distribuição de freqüências para variáveis qualitativas

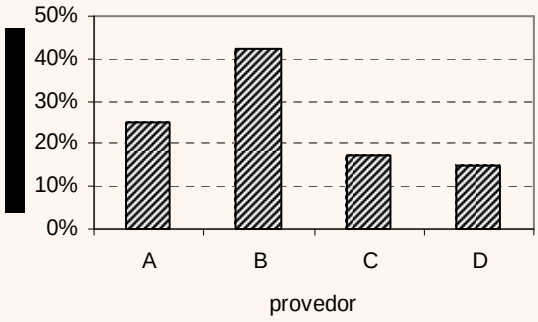


Gráfico de colunas para a apresentação da distribuição de freqüências do provedor usado pelo visitante do *site*.

Distribuição de freqüências para variáveis qualitativas

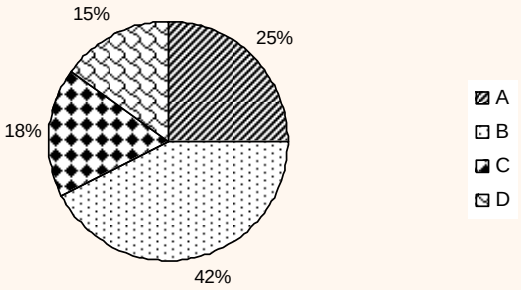
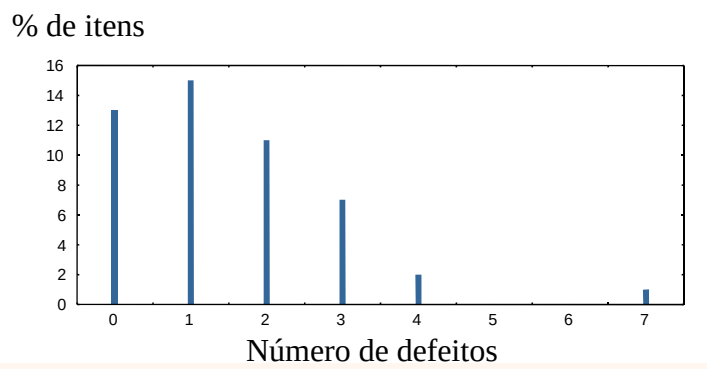


Gráfico de setores para a apresentação da distribuição de freqüências do provedor usado pelo visitante do *site*.

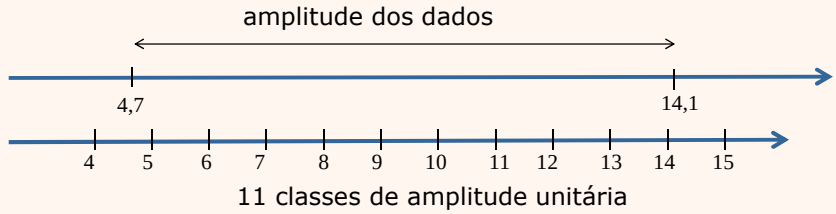
Distribuição de freqüências para variáveis quantitativas discretas



Variáveis contínuas

Construção da distribuição de freqüências

5,2	6,4	5,7	8,3	7,0	5,4	4,8	9,1
5,5	6,2	4,9	5,7	6,3	5,1	8,4	6,2
8,9	7,3	5,4	4,8	5,6	6,8	5,0	6,7
8,2	7,1	4,9	5,0	8,2	9,9	5,4	5,6
5,7	6,2	4,9	5,1	6,0	4,7	14,1	5,3
4,9	5,0	5,7	6,3	6,0	6,8	7,3	6,9
6,5	5,9						

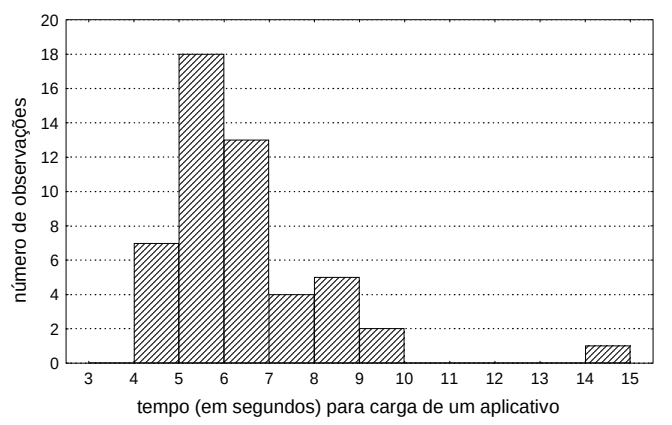


11 classes de amplitude unitária

Tabela de freqüências: variável contínua

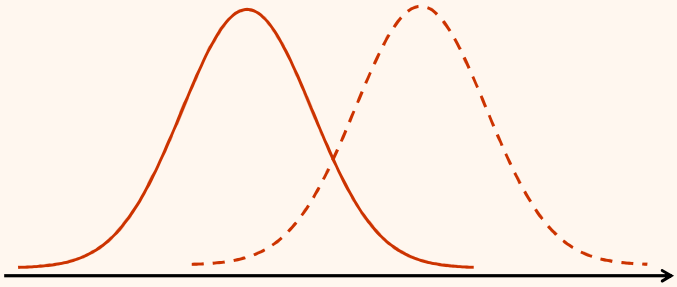
Classes de tempo	Ponto médio	Número de observações n_j	Percentagem de observações $100f_j$	Percentagem acumulada $100F_j$
4 |— 5	4,5	7	14	14
5 |— 6	5,5	18	36	50
6 |— 7	6,5	13	26	76
7 |— 8	7,5	4	8	84
8 |— 9	8,5	5	10	94
9 |— 10	9,5	2	4	98
10 |— 11	10,5	0	0	98
11 |— 12	11,5	0	0	98
12 |— 13	12,5	0	0	98
13 |— 14	13,5	0	0	98
14 |— 15	14,5	1	2	100
Total	-	50	100	-

Histograma



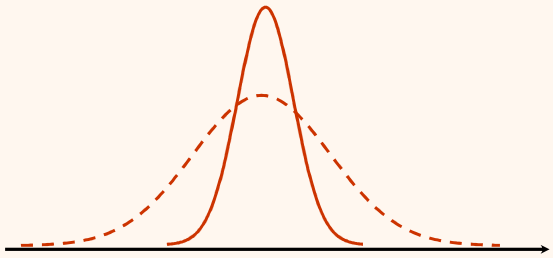
Formas de uma distribuição de freqüências

- Distribuições diferentes em termos da posição central



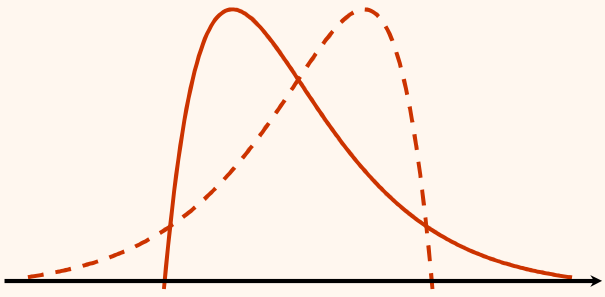
Formas de uma distribuição de freqüências

- Distribuições diferentes quanto à dispersão



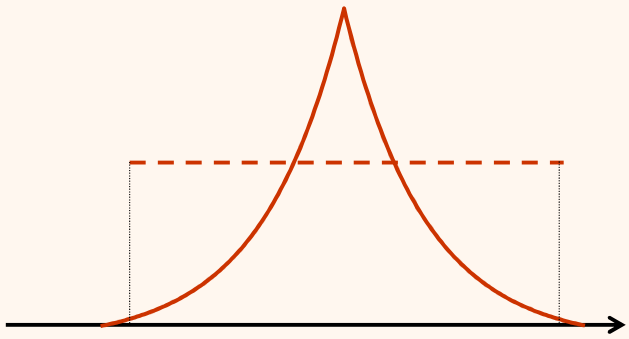
Formas de uma distribuição de freqüências

- Distribuições diferentes quanto à assimetria



Formas de uma distribuição de freqüências

- Distribuições diferentes quanto à curtose



Medidas descritivas

- A média aritmética: uma medida de posição central.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Exemplo

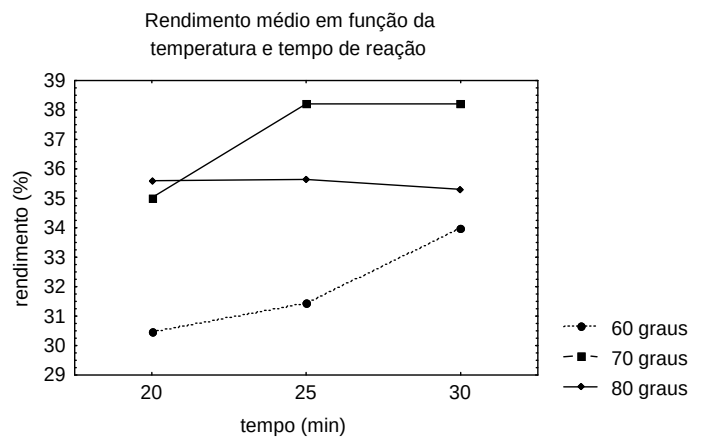
temperatura (^{0}C)	tempo (minutos)		
	20	25	30
60	29,7 28,7 30,2 31,3 31,2 31,7	31,0 30,6 32,8 31,9 31,2 31,2	32,9 32,7 34,8 34,9 33,8 34,9
70	36,6 35,7 35,3 35,1 30,2 37,2	35,7 40,4 41,7 36,9 34,5 40,0	34,8 36,8 37,4 38,9 38,7 42,5
80	40,2 33,6 33,4 35,2 38,1 33,0	37,0 34,4 29,8 33,9 43,2 35,5	36,0 31,3 36,6 32,5 39,2 35,9

Exemplo

Médias aritméticas do rendimento, para diferentes níveis de temperatura e tempo de reação, num processo químico.

tempera-tura (^{0}C)	tempo (minutos)		
	20	25	30
60	30,5	31,4	34,0
70	35,0	38,2	38,2
80	35,6	35,6	35,3

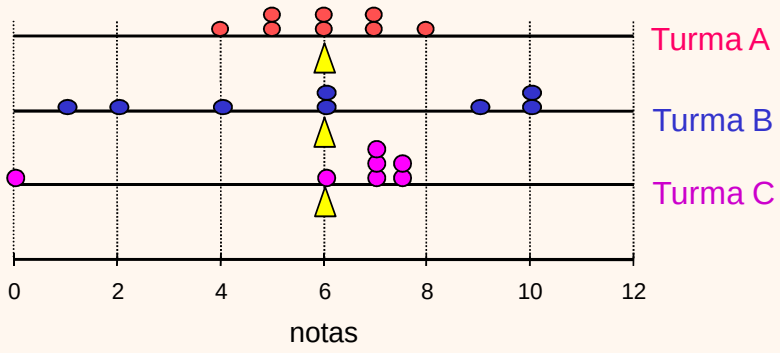
Exemplo



Exemplo: notas dos alunos de três turmas

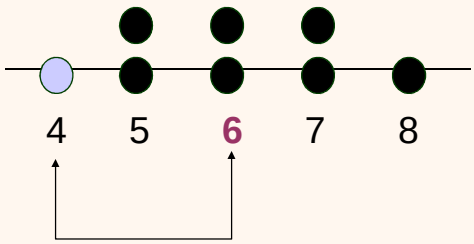
Turma	Notas dos alunos	Média da turma
A	4 5 5 6 6 7 7 8	6,00
B	1 2 4 6 6 9 10 10	6,00
C	0 6 7 7 7 7,5 7,5	6,00

Exemplo: notas dos alunos de três turmas



Como medir a dispersão?

Exemplo: Turma A (**4 5 5 6 6 7 7 8**)



distância (desvio) em relação à média

Como medir a dispersão?

Descrição	notação	resultados numéricos
Valores (notas dos alunos)	x_i	4 5 5 6 6 7 7 8
Média	$\bar{x}$	6
Desvios em relação à média	$x_i - \bar{x}$	-2 -1 -1 0 0 1 1 2
Desvios quadráticos	$(x_i - \bar{x})^2$	4 1 1 0 0 1 1 4

Variância (da amostra): $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$s^2 = \frac{4+1+1+0+0+1+1+4}{8-1} = 1{,}71$$

Como medir a dispersão?

Descrição	notação	resultados numéricos
Valores (notas dos alunos)	x_i	4 5 5 6 6 7 7 8
Média	$\bar{x}$	6
Desvios em relação à média	$x_i - \bar{x}$	-2 -1 -1 0 0 1 1 2
Desvios quadráticos	$(x_i - \bar{x})^2$	4 1 1 0 0 1 1 4

Desvio padrão (da amostra): $$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{4+1+1+0+0+1+1+4}{8-1}} = \sqrt{1{,}71} = 1{,}31$$

Medidas descritivas das notas finais dos alunos de três turmas.

Turma	Número de alunos	Média	Desvio padrão
A	8	6,00	1,31
B	8	6,00	3,51
C	7	6,00	2,69

Interprete.

Outra forma de calcular o desvio padrão

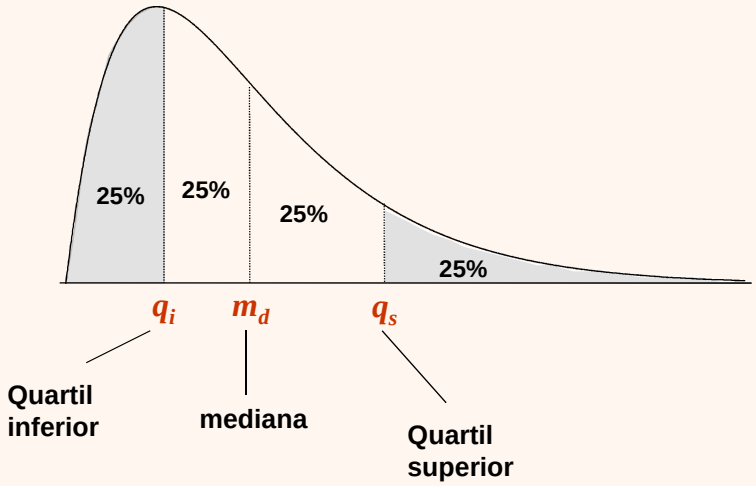
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)}$$

Valores	x_i:	4	5	5	6	6	7	7	8
Valores ao quadrado	x_i^2:	16	25	25	36	36	49	49	64

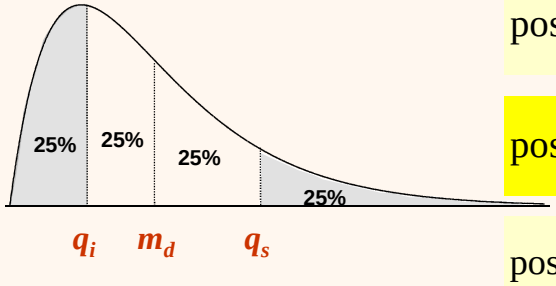
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 48 \qquad \bar{x} = 6 \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 300$$

$$s = \sqrt{\frac{300 - 8.(6)^2}{7}} = \sqrt{\frac{300 - 288}{7}} = \sqrt{\frac{12}{7}} = 1{,}31$$

Medidas baseadas na ordenação dos dados



Medidas baseadas na ordenação dos dados



Dados ordenados:

posição de q_i : $\frac{n+1}{4}$

posição de m_d : $\frac{n+1}{2}$

posição de q_s : $\frac{3(n+1)}{4}$

Se fracionário ➔ interpolação linear

Exemplo

Observações: 15, 18, 5, 7, 9, 11, 3, 5, 6, 8, 12.

Ordenando:

3 5 5 6 7 8 9 11 12 15 18

$n = 11$

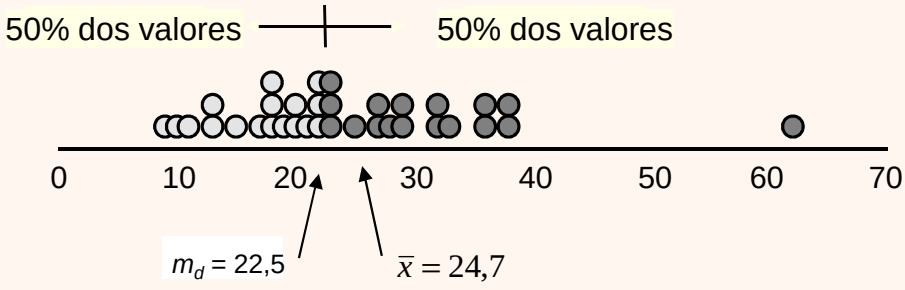
posição de q_i : $\frac{n+1}{4} = 3$ → $q_i = 5$

posição de m_d : $\frac{n+1}{2} = 6$ → $m_d = 8$

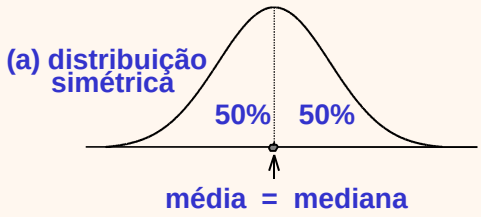
posição de q_s : $\frac{3(n+1)}{4} = 9$ → $q_s = 12$

Comparação entre média e mediana

- A média é mais influenciada por valores discrepantes.



Comparação entre média e mediana



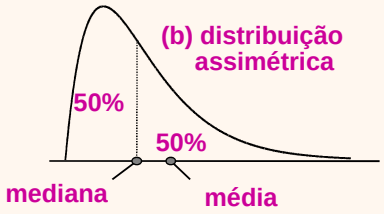


Diagrama em caixas

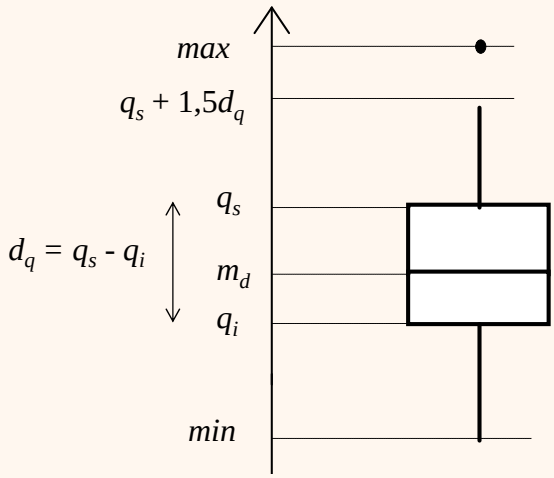
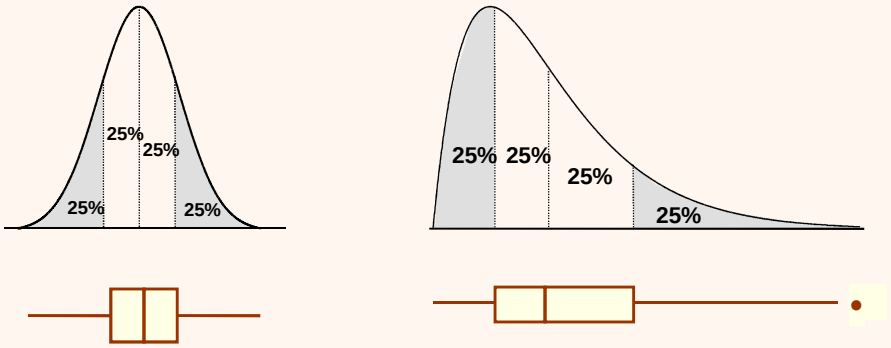
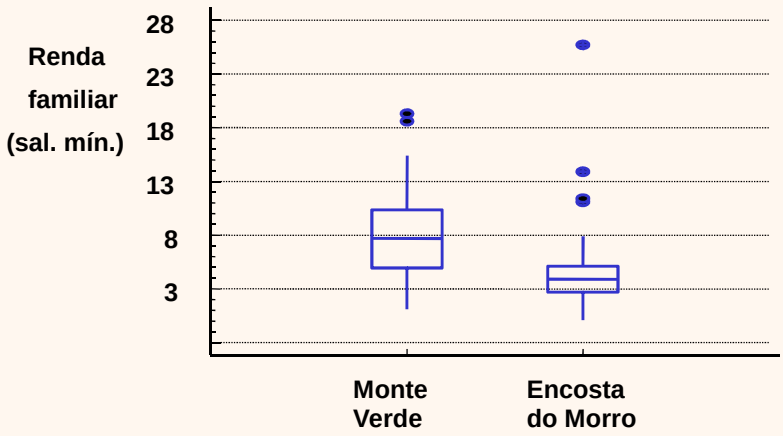


Diagrama em caixas e forma da distribuição



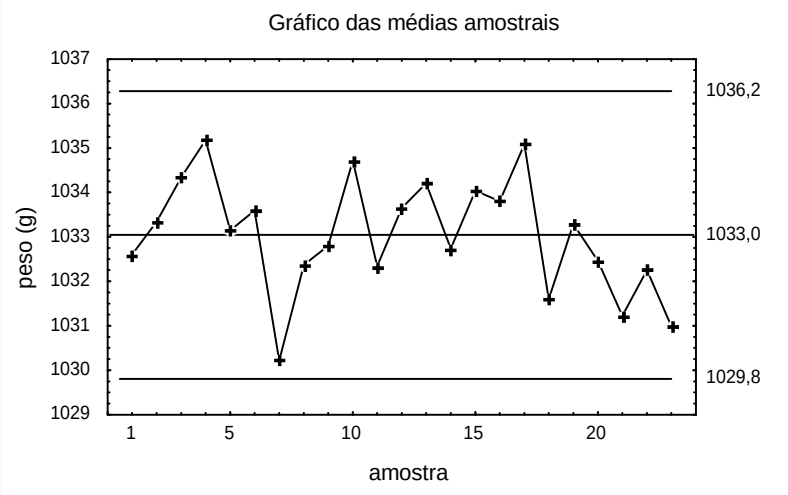
Interprete o gráfico



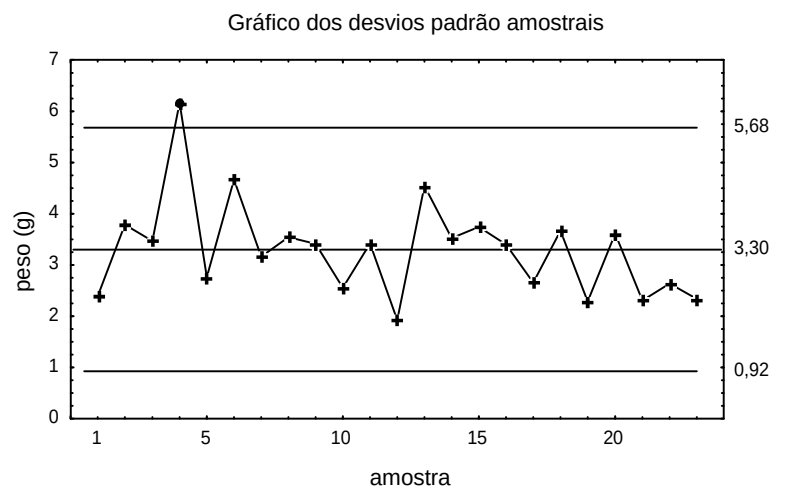
Observações ao longo do tempo

- EXEMPLO: todos os dias é retirada uma amostra de dez sacos de leite de um laticínio, durante 23 dias.
- Quer-se acompanhar o nível e a variabilidade do peso.

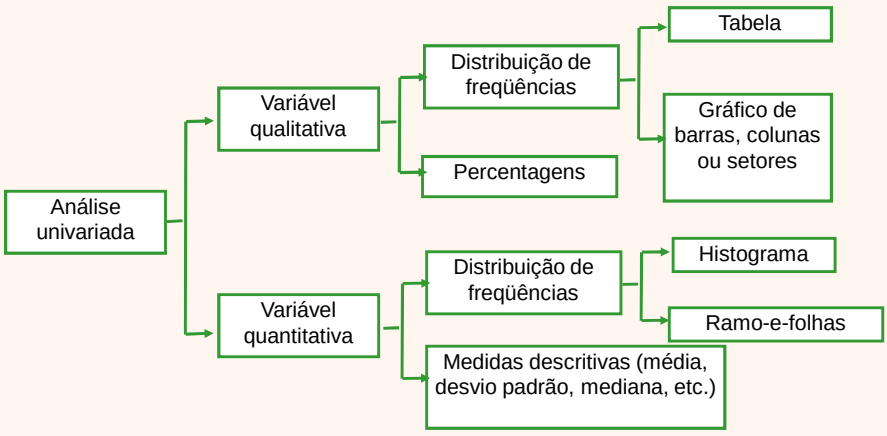
Observações ao longo do tempo



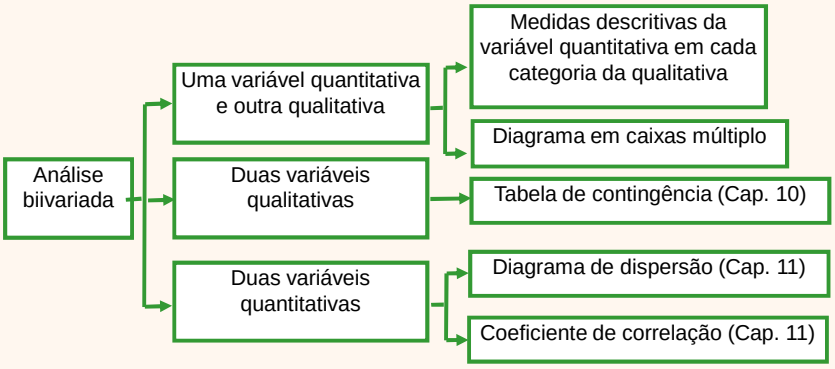
Observações ao longo do tempo



Orientação geral para análise exploratória de dados não temporais



Orientação geral para análise exploratória de dados não temporais



Métodos Quantitativos aplicados a Administração de Empresas

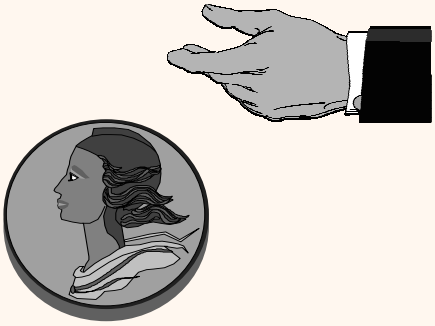
Willy Farias Albuquerque, M.Sc.

Cap. 4 – Probabilidade

UNIAMERICAS – UNIVERSIDADE DAS AMÉRICAS

Modelos probabilísticos

- Construção de modelos de probabilidade para entender melhor os fenômenos aleatórios



Modelos probabilísticos

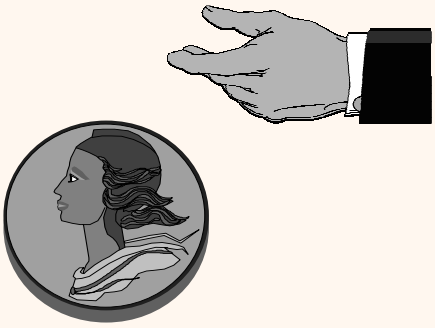
Definição do experimento

↓

Definição dos resultados possíveis do experimento

↓

Definição de uma regra que obtenha a probabilidade de cada resultado ocorrer.



Espaço amostral

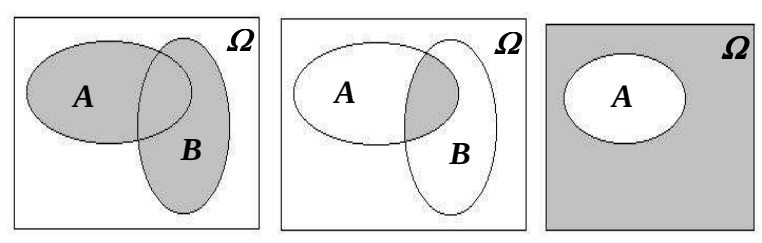
- O conjunto de *todos* os possíveis resultados do experimento é chamado de **espaço amostral** e é denotado pela letra grega Ω.
- Um espaço amostral é dito **discreto** quando ele for finito ou infinito enumerável; é dito **contínuo** quando for infinito, formado por intervalos de números reais.

Eventos

- Chamamos de **evento** a qualquer subconjunto do espaço amostral:
- A é um evento $\Leftrightarrow A \subseteq \Omega$

Operações entre eventos

(a) União: $A \cup B$ (b) interseção: $A \cap B$ (c) complementar: $\overline{A}$

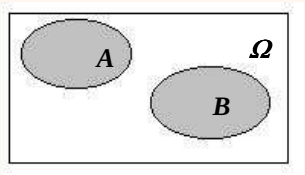


Operações entre eventos

Operação		Conjunto	Evento
a) União $A \cup B$		reúne os elementos de ambos os conjuntos	ocorre quando ocorrer pelo menos um deles (*A*, *B* ou ambos)
b) Interseção $A \cap B$		formado somente pelos elementos que estão em *A* e *B*	ocorre quando ocorrer ambos os eventos (*A* e *B*)
c) Complementar $\overline{A}$		formado pelos elementos que não estão em *A*	ocorre quando não ocorrer o evento *A* (*não A*)

Eventos mutuamente exclusivos

- Eventos são ditos **mutuamente exclusivos** se e só se eles não puderem ocorrer simultaneamente.
- *A* e *B* são *mutuamente exclusivos* $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \varnothing$



Probabilidade de eventos

- Espaços amostrais discretos equiprováveis

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

- sendo:
  - *n* resultados *igualmente prováveis*,
  - n_A destes resultados pertencem a um certo evento *A*

Probabilidade de eventos

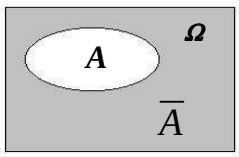
- Espaços amostrais discretos
- Se $A \subseteq \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$, então:

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} P(\omega_i)$$

Propriedades

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- Probabilidade do evento complementar

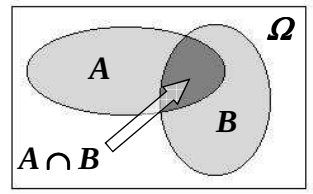
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



Propriedades

- Regra da soma das probabilidades

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Probabilidade condicional. Ex. de motivação

Condição do peso	Tipo do leite			
	B (*B*)	C (*C*)	UHT (*U*)	Total
dentro das especificações (*D*)	500	4500	1500	6500
fora das especificações (*F*)	30	270	50	350
Total	530	4770	1550	6850

$$P(F) = \frac{350}{6850} = 0{,}051 \qquad P(F \mid U) = \frac{50}{1550} = 0{,}032$$

Notar que: $$P(F \mid U) = \frac{50}{1550} = \frac{50/6850}{1550/6850} = \frac{P(F \cap U)}{P(U)}$$

Probabilidade condicional

- Sejam *A* e *B* eventos quaisquer, sendo *P*(*B*) > 0. Definimos a *probabilidade condicional de A dado B* por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidade condicional. Exemplo

- Seja o lançamento de 2 dados não viciados e a observação das faces voltadas para cima. Calcule a probabilidade de ocorrer faces iguais, sabendo-se que a soma é menor ou igual a 5.

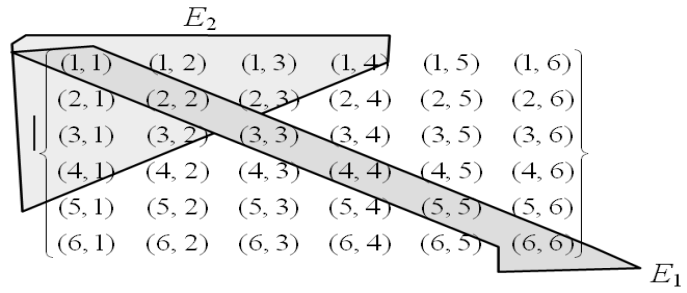
$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

E_1 = *faces iguais* = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)} e

E_2 = *soma das faces é menor ou igual a 5* =

= {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}.

Probabilidade condicional. Exemplo



$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{2/36}{10/36} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

Regra do produto

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

ou

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

Eventos independentes

- Dois ou mais eventos são **independentes** quando a ocorrência de um dos eventos não influencia a probabilidade da ocorrência dos outros. Nesse caso:

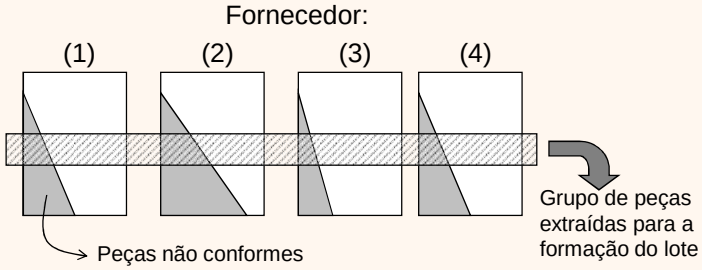
$$P(A \mid B) = P(A)$$

A e B são independentes

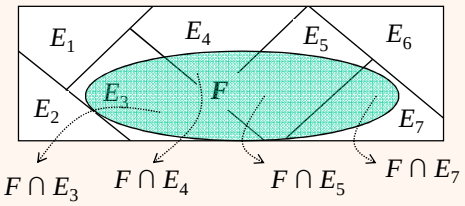
$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Teorema da probabilidade total

- Ilustração da formação de um lote de peças provindas de 4 fornecedores



Teorema da probabilidade total

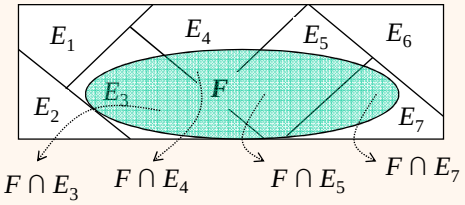


$$F = (F \cap E_1) \cup (F \cap E_2) \cup \ldots \cup (F \cap E_k)$$

$$P(F) = P[(F \cap E_1) \cup (F \cap E_2) \cup \ldots \cup (F \cap E_k)] =$$
$$= P(F \cap E_1) + P(F \cap E_2) + \ldots + P(F \cap E_k)$$

$$\Rightarrow \quad P(F) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i) \cdot P(F \mid E_i)$$

Teorema de Bayes



$$P(E_i \mid F) = \frac{P(E_i \cap F)}{P(F)}$$

$$\Rightarrow \quad P(E_i \mid F) = \frac{P(E_i) \cdot P(F \mid E_i)}{P(F)}$$

Métodos Quantitativos aplicados a Administração de Empresas

Willy Farias Albuquerque, M.Sc.

Cap. 5 – Variáveis aleatórias discretas

UNIAMERICAS – UNIVERSIDADE DAS AMÉRICAS

Variável aleatória

- Uma **variável aleatória** pode ser entendida como uma variável quantitativa, cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios.
- Exemplos:
  - número de coroas obtido no lançamento de 2 moedas;
  - número de itens defeituosos em uma amostra retirada, aleatoriamente, de um lote;
  - número de defeitos em um azulejo que sai da linha de produção;
  - número de pessoas que visitam um determinado *site,* num certo período de tempo;

Variável aleatória

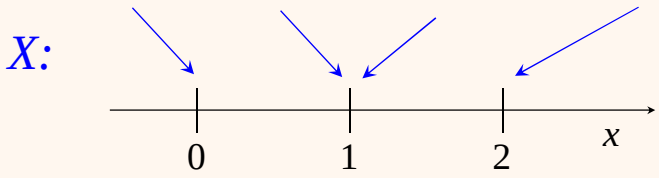
- Uma **variável aleatória** pode ser entendida como uma variável quantitativa, cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios.
- Exemplos:
  - volume de água perdido por dia, num sistema de abastecimento;
  - resistência ao desgaste de um certo tipo de aço, num teste padrão;
  - tempo de resposta de um sistema computacional;
  - grau de empeno em um azulejo que sai da linha de produção.

Variável aleatória

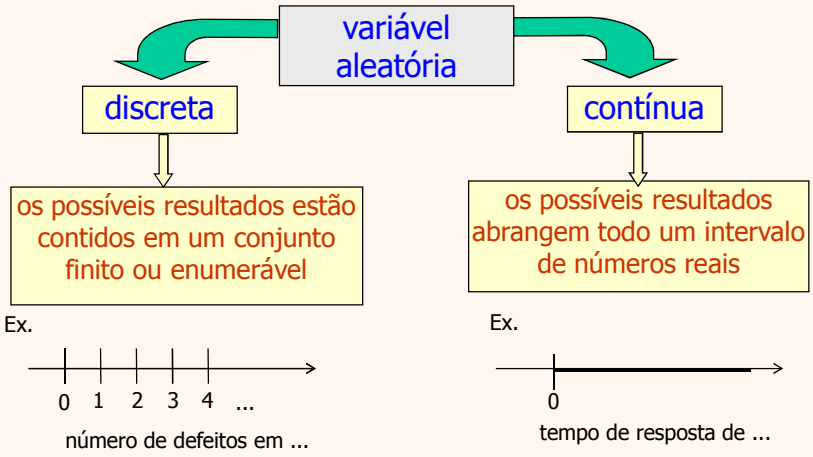
- Formalmente, uma **variável aleatória** é uma função que associa elementos do espaço amostral ao conjunto de números reais.

X = número de coroas obtido no lançamento de 2 moedas

$\Omega = \{(cara, cara), (cara, coroa), \{coroa, cara), (coroa, coroa)\}$



Variável aleatória



Variável aleatória discreta: função de probabilidade

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

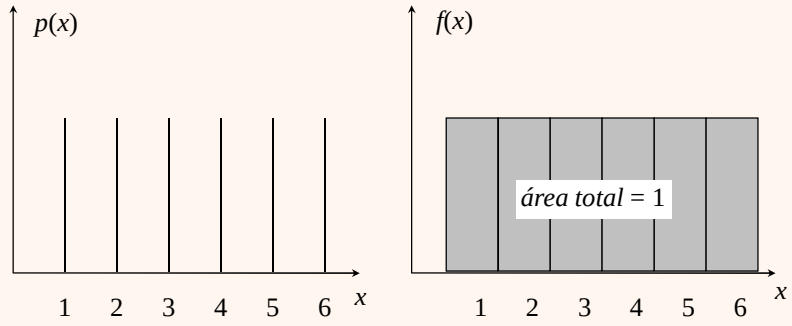
satisfazendo:

$$p(x_i) \geq 0$$

$$\sum_i p(x_i) = 1$$

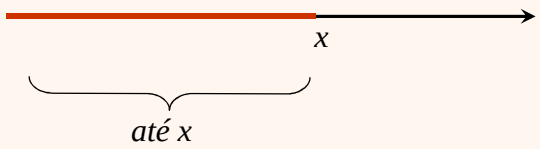
Variável aleatória discreta: função de probabilidade

- **X** = número obtido no lançamento de um dado comum.



Variável aleatória discreta: Função de distribuição acumulada

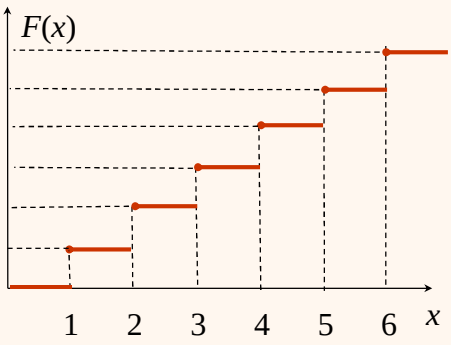
$$F(x) = P(X \leq x), \quad \forall x \in \Re$$



Variável aleatória discreta: Função de distribuição acumulada

- **X** = número obtido no lançamento de um dado comum.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1/6 & \text{se } 1 \le x < 2 \\ 2/6 & \text{se } 2 \le x < 3 \\ 3/6 & \text{se } 3 \le x < 4 \\ 4/6 & \text{se } 4 \le x < 5 \\ 5/6 & \text{se } 5 \le x < 6 \\ 1 & \text{se } x \ge 6 \end{cases}$$



Variável aleatória discreta: Valor esperado

Valores possíveis	Probabi-lidades
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
...	...
x_k	p_k
Total	1

$$\mu = E(X) = \sum_{j=1}^{k} x_j p_j$$

Variável aleatória discreta: Variância

Valores possíveis	Probabilidades
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
...	...
x_k	p_k
Total	1

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{j=1}^{k} (x_j - \mu)^2 \, p_j$$

Ou:

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

onde: $E(X^2) = \sum_{j=1}^{k} x_j^2 \, p_j$

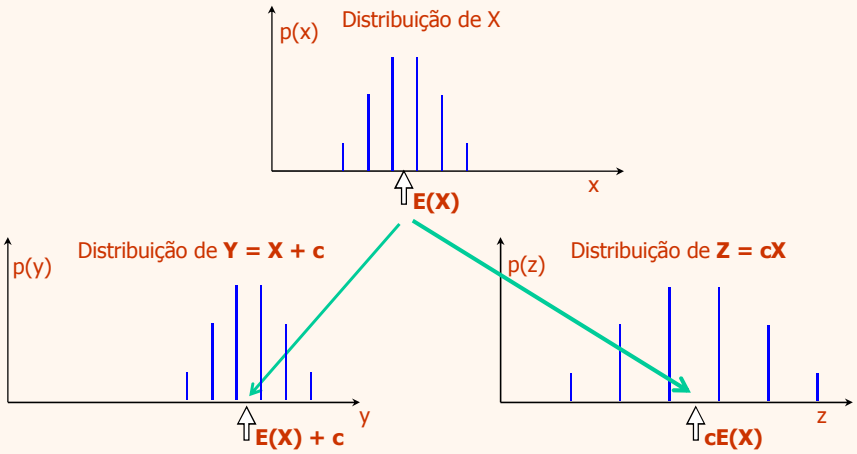
Desvio padrão:

$$\sigma = DP(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Propriedades do valor esperado e variância

a) $E(c) = c$	a) $V(c) = 0$
b) $E(X + c) = E(X) + c$	b) $V(X + c) = V(X)$
c) $E(cX) = cE(X)$	c) $V(cX) = c^2V(X)$
d) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$	d) $DP(cX) = \|c\|DP(X)$
e) $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$	

Propriedades do valor esperado e variância



Variáveis aleatórias independentes

- *X*1, *X*2, ..., *Xn* podem ser consideradas **variáveis aleatórias independentes** se o conhecimento de uma não altera as distribuições de probabilidades das demais.
- Vale para **variáveis aleatórias independentes**:
  V(X + Y) = V(X) + V(Y)
  V(X – Y) = V(X) + V(Y)

Modelos discretos

- **Distribuição de Bernoulli**

x	$p(x)$
0	$1-p$
1	p
Total	1

$$E(X) = p$$

$$V(X) = p.(1-p)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - p & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

Modelos discretos

- **Distribuição Binomial**

$$\boldsymbol{X} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

onde X_1, X_2, ..., X_n são variáveis aleatórias independentes, sendo cada uma delas com distribuição de Bernoulli de parâmetro p constante.

Ou seja,

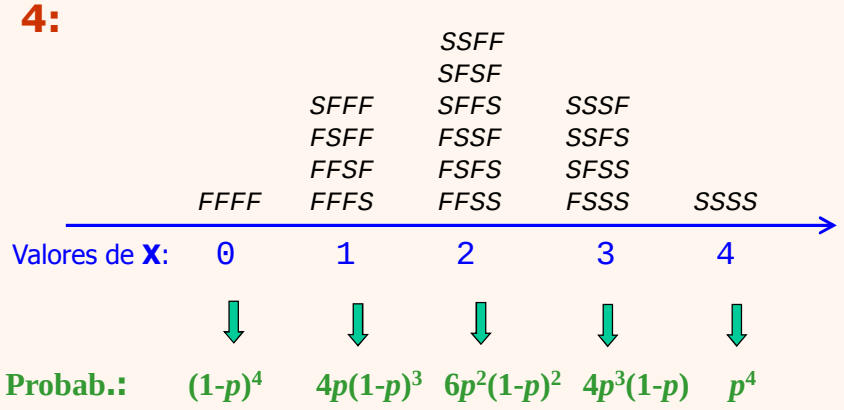
Modelos discretos

- **Distribuição Binomial**
  - ***X*** = número de sucessos em n ensaios
  - independentes e
  - P{sucesso} = p,

  constante para todo ensaio (0 < p < 1).

Modelos discretos

- **Distribuição Binomial, n = 4:**



Modelos discretos

- **Distribuição Binomial**

$$p(x) = \binom{n}{x} . p^x . (1-p)^{n-x} \qquad (x = 0, 1, ..., n)$$

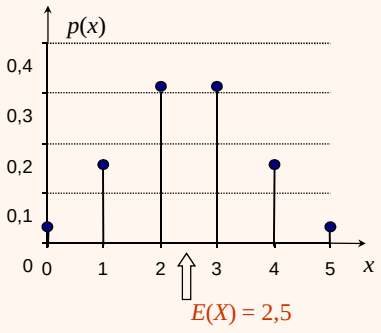
$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!\, x!}$$

$$E(X) = n.p \qquad V(X) = n.p.(1-p)$$

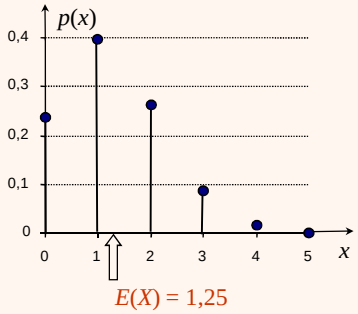
Modelos discretos

- **Distribuição Binomial**

binomial com $n = 5$ e $p = 0,5$



binomial com $n = 5$ e $p = 0,25$



Modelos discretos

- **Ex. 5.2 - Binomial n = 10 e p = 0,7**

- Qual a probabilidade da maioria também acessar a p24?

- **P(X > 5) =**
  = p(6) + p(7) + p(8) + p(9) + + p(10)
  = 0,8497

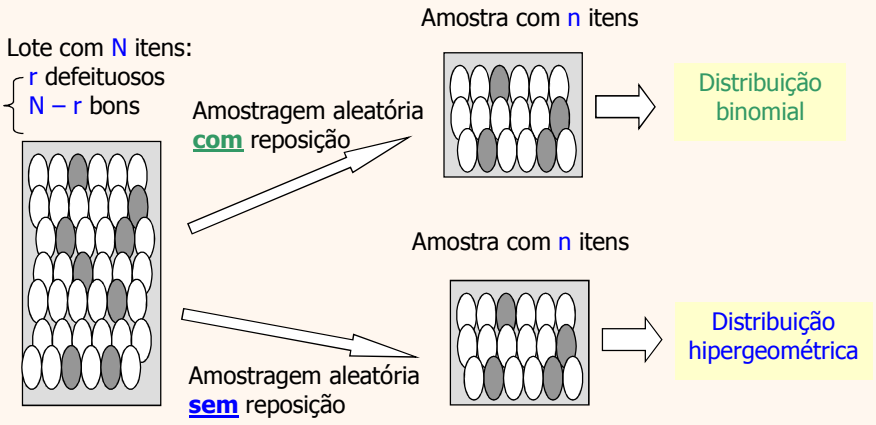
Tabela da binomial

n	x	0,70
10	0	0,0000
	1	0,0001
	2	0,0014
	3	0,0090
	4	0,0368
	5	0,1029
	6	0,2001
	7	0,2668
	8	0,2335
	9	0,1211
	10	0,0282

***X* > 5**

Modelos discretos

- **Distribuição Hipergeométrica**



Modelos discretos

- **Distribuição Hipergeométrica**

$$p(x) = \frac{\binom{r}{x} \cdot \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad [x = 0, 1, ..., min(r, n)]$$

$$E(X) = n.p$$

$$V(X) = n.p.(1-p).\ \frac{N-n}{N-1} \qquad (p = r/N)$$

Modelos discretos

- **Distribuição de Poisson**
  - Na prática, muitas situações nas quais interessa o número de observações de uma variável em um intervalo contínuo (tempo ou espaço) podem ser convenientemente explicadas pela distribuição de Poisson. Exemplos:
    - chamadas telefônicas por minuto,
    - mensagens que chegam a um servidor por segundo
    - acidentes por dia,
    - defeitos por m2, etc..

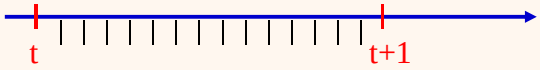
Modelos discretos

- **Distribuição de Poisson. Suposições:**
  - Os números de ocorrências em quaisquer intervalos são **independentes**.
  - A probabilidade de duas ou mais ocorrências simultâneas é **zero**.
  - O número médio de ocorrências (λ) é **constante** em todo o intervalo considerado.

Modelos discretos

- **Distribuição de Poisson. Uma justificativa:**

X = núm. de ocorrências em [t, t+1]



n intervalos de amplitude 1/n, com $n \mapsto \infty$

p = probab. de ocorrência em cada intervalo

$$P(X = x) \approx \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$n \mapsto \infty$
$p \mapsto 0$
$n\,p \mapsto \lambda > 0$

$$P(X = x) \longrightarrow \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad (x = 1, 2, \ldots)$$

Modelos discretos

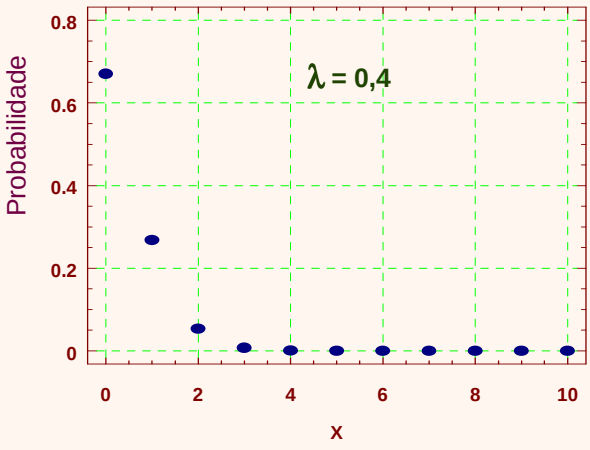
- **Distribuição de Poisson**

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

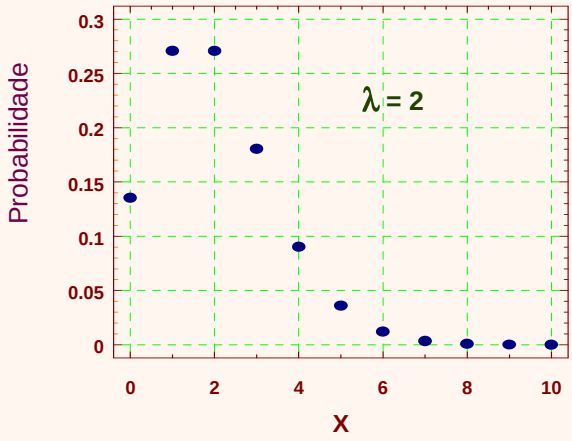
Modelos discretos

- **Distribuição de Poisson**



Modelos discretos

- **Distribuição de Poisson**



Curso de Métodos Quantitativos – Prof. Willy Farias Albuquerque